1Д

УДК 621.01:531

П.В. Дяченко
Черкаський державний технологічний університет, Україна

Просторова математична модель власних частот та форм коливань механічної системи класу одноступінчастих, евольвентних зубчастих передач

У статті пропонується просторова математична модель динаміки механічної системи класу одноступінчастих, циліндричних, косозубих, евольвентних зубчастих передач. Пропонована модель являє собою систему чотирнадцяти диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат, складену на основі рівнянь Лагранжа другого роду, що описують просторові коливання зубчастих коліс механічної системи.

Постановка проблеми. Поглиблене дослідження динаміки зубчастих передач передбачає розгляд впливу різноманітних факторів на динамічну навантаженість і коливальний процес у рамках внутрішньої і зовнішньої динаміки. Дослідження динамічних процесів, з метою спрощення, в основному пов'язане з розглядом динаміки одноступінчастих передач. Як у випадку одноступінчастих, так і багатоступінчастих передач знання частот власних коливань є визначальним для динамічного аналізу механічної системи.

Механічні коливальні системи у класичній постановці складаються з типових ланок, які можуть бути представлені пружинами, демпферами і масоінерційними елементами. Для розкриття фізичної сутності перебігу вібраційного процесу і отримання спектрів вібрації використовують різні підходи, що базуються на розробці і дослідженні математичних моделей дискретних і континуальних систем [1], [2]. В залежності від характеру зовнішнього навантаження і пов'язаних з ним збурень, динамічні моделі поділяються на детерміновані, стохастичні й евристичні [1], [2], [3]. У детермінованих моделях зовнішні впливи і параметри розглядаються як невипадкові величини і функції. У стохастичних моделях ці характеристики розглядаються як випадкові процеси, функції випадкових аргументів і випадкові величини. Керовані пружні властивості опор, в залежності від зовнішніх збурень, відображаються у евристичних моделях.

За адекватністю опису динамічними моделями реальних процесів, на відміну від дискретних моделей, у яких маси, жорсткості та інші параметри розглядаються як зосереджені, в континуальних системах використовуються розподілені параметри. У змішаних моделях розподілені і зосереджені параметри поєднуються одночасно. Рух континуальних систем, як систем з розподіленими параметрами, описується диференціальними рівняннями у частинних похідних, розв'язування яких для найбільш повних динамічних моделей зубчастих передач є складним, навіть у випадку застосування сучасних методів комп'ютерного моделювання. У ряді випадків для визначення частот коливань і динамічних навантажень континуальних систем використовують алгоритмічні методи кінцевих різниць і кінцевих елементів [3]. При цьому масо-жорсткісні, демпфуючі та інші параметри системи вважаються постійними, а їх зв'язки здійснюються у вузлах

області розбиття. Приймаючи переміщення вузлів за узагальнені координати системи, переміщення точок всередині елемента виражаються через переміщення його вузлів. Зазвичай, для континуальних моделей при моделюванні на мікрорівні, система розв'язуваних рівнянь руху має високий порядок, однак наявність великої кількості нульових елементів матриць жорсткості та інерції дещо спрощує розв'язок. Врахування пружних властивостей, фактора затухання коливань, наявності зазорів, нелінійності характеристик значно ускладнює динамічні моделі.

При складенні динамічних моделей формується розрахункова схема, визначаються місця і величини прикладених зовнішніх впливів (силових чи кінематичних), складаються рівняння руху динамічної системи у вигляді математичної моделі і обирається метод розв'язку або здійснюється підготовка початкових даних для комп'ютерного моделювання [3].

Загальна методика розв'язування задач динаміки об'єктів зі стаціонарними зв'язками ґрунтується на теоремах аналітичної механіки. Фундаментальним положенням є поняття принципу можливих переміщень, або принципу Лагранжа [4]. Об'єднуючи цей принцип з принципом Даламбера, Лагранж отримав загальні рівняння динаміки, з яких випливають основні диференціальні рівняння руху матеріальної системи і основні теореми динаміки. У [4] показано, що якщо рух голономної системи описується узагальненими координатами $q_1, q_2, ..., q_n$ і узагальненими швидкостями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$, то рівняння руху мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \tag{1}$$

де T – кінетична енергія системи, Π – потенціальна енергія, q_j – узагальнені координати, $\dot{q}_j$ – узагальнені швидкості. Ці рівняння називаються *рівняннями Лагранжа другого роду*. Якщо рух відбувається у потенціальному полі і вважається, що П не залежить від узагальнених швидкостей $\dot{q}_j$, то рівняння Лагранжа (1) набудуть вигляду [4].

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - \Pi) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - \Pi) = 0, \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \; j = 1,2,...,n, \tag{2}$$

де L=T-П – кінетичний потенціал, або функція Лагранжа, n – кількість узагальнених координат. Якщо крім активних сил, що визначаються функцією П, на елементи системи діють сили, які цією функцією не можуть бути визначені, наприклад, сили опору різного фізичного походження, то рівняння (1) можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \; j = 1,2,...,n. \tag{3}$$

У правій частині цих рівнянь знаходяться сили, що не визначаються функцією П.

Перевагою рівнянь Лагранжа порівняно з іншими методами є те, що вони дають змогу розробляти математичні моделі динаміки за єдиною методикою. Переміщення елементів системи можуть бути як лінійними, так і кутовими, тобто узагальненими координатами системи можуть виступати як лінійні переміщення, так і кути повороту. Відповідні узагальнені сили – це звичайні сили і крутні моменти. Безпосередній аналіз зв'язку переміщень і сил на основі законів динаміки (Ньютона) і виведення відповідних рівнянь руху пов'язаний з певними труднощами через векторний характер переміщень і зусиль. Тому для виведення рівнянь руху вважається доцільним використовувати рівняння Лагранжа другого роду у потенціальному полі [4]. Оскільки величини

Т і П є скалярними, то виведення рівнянь руху є досить простим і зводиться до звичайних операцій диференціювання. Необхідно відмітити, однак, що у простих випадках для виведення рівнянь руху можна безпосередньо використовувати закони Ньютона.

Аналіз наукових досліджень. Актуальність дослідження динаміки зубчастих передач підтверджується роботами багатьох вітчизняних та зарубіжних дослідників. В основоположних роботах [5, с. 175], [6] були виявлені фази кромочного і серединного контакту зубців, вплив циклічної похибки, виконана оцінка динамічних навантажень у зачепленні, отримані спектри коливань зубчастої передачі. У роботах інших авторів динамічна модель була доповнена з урахуванням впливу пружної піддатливості опор; розглянуто частотний спектр параметричних коливань в залежності від змінної жорсткості зачеплення і впливу масляної плівки; у окремих роботах відмічається суттєвий вплив на динамічну навантаженість і частотний спектр коливань пружних опор зубчастих передач.

Метою даної статті є розробка просторової математичної моделі власних частот і форм коливань механічної системи класу циліндричних одноступінчастих евольвентних зубчастих передач, з метою її подальшої комп'ютерної реалізації. Просторовість моделі забезпечується врахуванням шести ступенів вільності для зубчастих коліс і трьох ступенів для кожного валу.

Основна частина. Розробка математичної моделі здійснюється на основі попередньо створеної моделі динаміки, спрощена кінематична схема якої зображена на рис. 1.

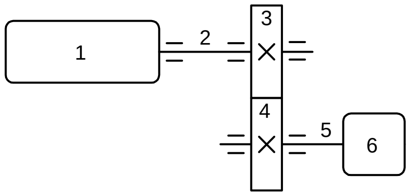


Рисунок 1 – Спрощена кінематична схема зубчастої передачі

На схемі позначені: 1, 6 – приєднані маси двигуна і робочого механізму, 2, 5 – ділянки валів між приєднаними масами і зубчастими колесами, 3, 4 – зубчасті колеса.

Запропонована попередньо модель динаміки дає змогу дослідити вплив мас зубчастих коліс, пружність і довжину валів, на значення частот і форм власних коливань системи з урахуванням опору середовища, обумовленого наявністю тертя і демпфуючих властивостей масляної плівки у зачепленнях. За узагальнені координати динамічної моделі взято:

φ, φ_1, φ_2, φ_3 – кути повороту приєднаних мас та ділянок валів навколо осей x_1, x_2;

ϕ_1^y, ϕ_1^z, ϕ_2^y, ϕ_2^z – кути повороту шестерні та колеса навколо осей y_1, y_2 та z_1, z_2;

x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 – лінійні переміщення шестерні та колеса вздовж осей x, y, z.

Конструктивні параметри механічної системи:

J, J_3 – моменти інерції приєднаних мас двигуна 1 та навантаження 2 відносно осі x (рис. 1);

J_{x1}, J_{x2} – моменти інерції відносно осі x ділянок валів 2, 5 між зубчастими колесами 3, 4 та приєднаними масами 1, 6 відповідно (рис. 1);

J_{y1}, J_{y2} – моменти інерції зубчастих коліс 3, 4 відносно осі y (рис. 1);

J_{z1}, J_{z2} – моменти інерції зубчастих коліс 3, 4 відносно осі z (рис. 1);

m_1, m_2 – маси зубчастих коліс 3, 4 (рис. 1);

M, M_3 – крутний момент двигуна 1 та момент опору механізму навантаження 6 відповідно;

k_1, k_2, l_1, l_2 – крутильні жорсткості та довжини валів 2, 5 (рис. 1);
C'_{1Z}, C''_{1Z} – жорсткості опор вхідного вала 2 по осі z (рис. 1);
C'_{1y}, C''_{1y} – жорсткості опор вхідного вала 2 по осі y (рис. 1);
C_{x1} – жорсткість опори вхідного вала 2 по осі x (рис. 1);
C'_{2Z}, C''_{2Z} – жорсткості опор вихідного вала 5 по осі z (рис. 1);
C'_{2y}, C''_{2y} – жорсткості опор вхідного вала 5 по осі y (рис. 1);
C_{x2} – жорсткість опори вхідного вала 5 по осі x (рис. 1).

Таким чином, всі конструктивні, геометричні та динамічні параметри відображені практично повною мірою. Відповідно, вектор узагальнених координат механічної системи містить сукупність кутових та лінійних переміщень і має вигляд: $q = \{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_1^y, \phi_1^z, \phi_2^y, \phi_2^z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2\}^T$.

Отже, вектор узагальнених координат містить чотирнадцять компонент, які описують крутильні і лінійні (поздовжньо-поперечні та згинальні) коливання елементів механічної системи.

Методика складання рівнянь Лагранжа (1) – (3) містить такі кроки:

1. Визначення кінетичної енергії системи $T = \sum_i T_i$, де $T_i = \frac{J_i \dot{q}_i^2}{2}$ – кінетична енергія окремих елементів системи.

2. Визначення потенціальної енергії системи $\Pi = \sum_i \Pi_i$, де Π_i – потенціальна енергія окремих елементів системи.

3. Знаходження частинних похідних від кінетичної енергії по узагальнених швидкостях $\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$, і повної похідної за часом $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$. Кількість узагальнених координат відповідає кількості ступенів вільності системи.

4. Визначення частинних похідних від кінетичної енергії по узагальнених координатах $\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$.

5. Визначення узагальненої сили Q_i, яка для консервативної системи визначиться як частинна, похідна від потенціальної енергії по узагальненій координаті $Q_i = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)$.

Виконаємо процес створення математичної моделі по кроках.

1. Кінетична енергія системи запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} 2T = J_{x1}\dot{\varphi}_1^2 + m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + J_{y1}(\dot{\phi}_1^y)^2 + J_{z1}(\dot{\phi}_1^z)^2 + J_{x2}\dot{\varphi}_2^2 + \\ + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + J_{y2}(\dot{\phi}_2^y)^2 + J_{z2}(\dot{\phi}_2^z)^2 + J\dot{\varphi}^2 + J_3\dot{\varphi}_3^2. \end{aligned} \quad (4)$$

За відсутності приєднаних мас, тобто у випадку ізольованої зубчастої передачі, члени $J\dot{\varphi}^2; J_3\dot{\varphi}_3^2$ будуть відсутні. За відсутності осьових переміщень, тобто без урахування поздовжніх осьових сил, відсутніми будуть члени $m_1\dot{x}_1^2$ та $m_2\dot{x}_2^2$.

2. Визначаємо потенціальну енергію системи:

$$2\Pi = k_1(\varphi-\varphi_1)^2 + k_2(\varphi_2-\varphi_3)^2 + C'_{1z}(z_1 - l_1\phi_1^y)^2 + C''_{1z}(z_1 + l_2\phi_1^y)^2 + C''_{2z}(z_2 - l_1\phi_2^y)^2 +$$
$$+ C''_{2z}(z_2 + l_2\phi_2^y)^2 + C'_{1y}(y_1 - l_1\phi_1^z)^2 + C''_{1y}(y_1 + l_2\phi_1^z)^2 + C'_{2y}(y_2 - l_1\phi_2^z)^2 + C''_{2y}(y_2 + l_2\phi_2^z)^2 +$$
$$+ C_з(t)\{ \frac{1}{\cos\alpha_t}\left[(z1 - z2) + (\phi_1^y - \phi_2^y)\xi\right]^2 + r_{b1}\varphi_1 - r_{b2}\varphi_2 + tg\beta_0(x_1 - x_2) + \delta\varphi + j + w + \qquad (5)$$
$$+ \frac{1}{\sin\alpha_t}\left[(y_1 - y_2) + (\phi_1^z - \phi_2^z)r_{b1}g\beta_0\right]^2 + (x1 - x2)\ \}^2 + C_{1x}x_1^2 + C_{2x}x_2^2.$$

3. Проведемо операції диференціювання згідно з формулою (1). Похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) = J\ddot\varphi;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_3}\right) = J_3\ddot\varphi_3;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_1}\right) = J_x\ddot\varphi_1;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_2}\right) = J_{x2}\ddot\varphi_2$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\phi_1^y}\right) = J_{y1}\ddot\phi_1^y;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\phi_2^y}\right) = J_2\ddot\phi_2^y;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\phi_1^z}\right) = J_{z1}\ddot\phi_1^z;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\phi_2^z}\right) = J_{z2}\ddot\phi_2^z$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot x_1}\right) = m_1\ddot x_1;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot x_2}\right) = m_2\ddot x_2;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot y_1}\right) = m_1\ddot y_1;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot y_2}\right) = m_2\ddot y_2$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot z_1}\right) = m_1\ddot z_1;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot z_2}\right) = m_2\ddot z_2.$$

4. Похідні від кінетичної енергії по узагальнених координатах у всіх випадках дорівнюють нулю, тобто $\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$.

5. Проведемо операції диференціювання від потенціальної енергії. Відповідні частинні похідні набудуть вигляду:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = k_1(\varphi-\varphi);\ \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_3} = -k_1(\varphi_2-\varphi_3);\ \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1} = -k(\varphi-\varphi_1) + C_з(t)r_{b1}\times R_1;\ \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_2} = -k_1(\varphi_2-\varphi_3) + C_з(t)r_{b2}\times R_2;$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1^y} = -c'_{1z}(z_1 - l_1\varphi_1^y)l_1 + c''_{1z}(z_1 - l_2\varphi_1^y)l_2 + C_з(t)\times\xi\times R_3;$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_2^y} = -c'_{2z}(z_2 - l_1\varphi_2^y)l_1 + c''_{2z}(z_2 + l_2\varphi_2^y)l_2 - C_з(t)\times\xi\times R_4;$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1^z} = -c'_{1y}(y_1 - l_1\varphi_1^z)l_1 + c''_{1y}(y_1 + l_2\varphi_1^z)l_2 + C_з(t)\times r_{b1}\times tg\beta_0\times R_5;$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial\phi_2^z} = -c'_{2y}(y_2 - l_1\phi_2^z)l_1 + c''_{2y}(y_2 + l_2\phi_2^z)l_2 - C_з(t)\times r_{b1}\times tg\beta_0\times R_6;$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_1} = c_{1x}x_1 + C_з(t)(tg\beta_0 + 1)\times R_7;\ \frac{\partial\Pi}{\partial x_2} = c_{2x}x_2 - C_з(t)(tg\beta_0 + 1)\times R_8;$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial y_1} = c'_{1y}(y_1 - l_1\varphi_1^z) + c''_{1y}(y_1 + l_1\varphi_1^z) + C_з(t)\times R_9;$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial y_2} = c'_{2y}(y_2 - l_1\varphi_2^z) + c''_{2y}(y_2 + l_2\varphi_2^z) + C_з(t)\times R_{10};$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial z_1} = c'_{1z}(z_1 - l_1\varphi_1^y) + c''_{1z}(z_1 + l_2\varphi_1^y) + C_з(t)\times R_{11};$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial z_2} = c'_{2z}(z_2 - l_1\varphi_2^y) + c''_{2z}(z_2 + l_2\varphi_2^y) - C_з(t)\times R_{12};$$

Коефіцієнти $R_1 - R_{12}$ являють собою циклічно повторювані функції. На підставі формули (1) і проведених операцій диференціювання, прирівнявши ліві і праві частини, отримуємо систему 14 диференціальних рівнянь руху динамічної системи зубчастої передачі, без врахування фактора демпфування системи. Отримана математична модель має вигляд:

$$\begin{aligned}
&1.\ J\ddot{\varphi} = -k_1(\varphi - \varphi_1) + M;\\
&2.\ J_{X1}\ddot{\varphi}_1 = k_1(\varphi - \varphi_1) - c_3(t) r_{B1} R_1;\\
&3.\ J_{X2}\ddot{\varphi}_2 = -k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + c_3(t) r_{B2} R_2;\\
&4.\ J_3\ddot{\varphi}_3 = k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + M_3;\\
&5.\ J_{Y1}\ddot{\phi}_1^{Y} = -C'_{1Z}(z_1 - l_1\phi_1^{Y})l_1 + C''_{1Z}(z_1 + l_2\phi_1^{Y})l_2 + c_3(t)\xi R_3;\\
&6.\ J_{Y2}\ddot{\phi}_2^{Y} = -C'_{2Z}(z_2 - l_1\phi_2^{Y})l_1 + C''_{2Z}(z_2 + l_2\phi_2^{Y})l_2 - c_3(t)\xi R_4;\\
&7.\ J_{Z1}\ddot{\phi}_1^{Z} = -C'_{1Y}(y_1 - l_1\phi_1^{Z})l_1 + C''_{1Y}(y_1 + l_2\phi_1^{Z})l_2 + c_3(t) r_{B1} tg\,\beta_0 R_5;\\
&8.\ J_{Z2}\ddot{\phi}_2^{Z} = -C'_{2Y}(y_2 - l_1\phi_1^{Z})l_1 + C''_{2Y}(y_2 + l_2\phi_2^{Z})l_2 - c_3(t) r_{B2} tg\,\beta_0 R_6;\\
&9.\ m_1\ddot{x}_1 = C_{1X}x_1 + c_3(t)(tg\,\beta_0 + 1)R_7;\\
&10.\ m_2\ddot{x}_2 = C_{2X}x_2 + c_3(t)(tg\,\beta_0 + 1)R_8;\\
&11.\ m_1\ddot{y}_1 = C'_{1Y}(y_1 - l_1\phi_1^{Z}) + C''_{1Y}(y_1 + l_2\phi_1^{Z}) + c_3(t)R_9;\\
&12.\ m_2\ddot{y}_2 = C'_{2Y}(y_2 - l_1\phi_2^{Z}) + C''_{2Y}(y_2 + l_2\phi_1^{Z}) - c_3(t)R_{10};\\
&13.\ m_1\ddot{z}_1 = C'_{1Z}(z_1 - l_1\phi_1^{Y}) + C''_{1z}(z_1 + l_2\phi_1^{Y}) + c_3(t)R_{11};\\
&14.\ m_2\ddot{z}_2 = C'_{2Z}(z_2 - l_1\phi_2^{Y}) + C''_{2Z}(z_2 + l_2\phi_2^{Y}) - c_3(t)R_{12}.
\end{aligned} \tag{6}$$

де $R_1 = R_2 = R_7 = R_8 = A;\ R_3 = R_4 = R_{11} = R_{12} = A/cos\alpha_t;\ R_5 = R_6 = R_9 = R_{10} = A/sin\alpha_t.$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\cos\alpha_t}\left[(z_1 - z_2) + (\phi_1^y - \phi_2^y)\xi\right] + r_{b1}\varphi_1 - r_{b2}\varphi_2 + tg\beta_0(x_1 - x_2) + \delta\varphi + j + w +$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha_t}\left[(y_1 - y_2) + (\phi_1^z - \phi_2^z)r_{b1}tg\beta_0\right] + (x_1 - x_2) = A\,(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi).$$

Кожне з рівнянь системи окремо описує:

– рівняння 1 (відносно φ) – крутильні коливання ділянки первинного вала 2 між приєднаною масою двигуна 1 та зубчастим колесом 3 (рис. 1);

– рівняння 2 (відносно φ_1) – крутильні коливання колеса 3 навколо осі x_1 (рис. 1);

– рівняння 3 (відносно φ_2) – крутильні коливання колеса 4 навколо осі x_2 (рис. 1);

– рівняння 4 (відносно φ_3) – крутильні коливання ділянки вторинного вала 5 між приєднаною масою навантаження 6 та зубчастим колесом 4 (рис. 1);

– рівняння 5 (відносно ϕ_1^y) – крутильні коливання колеса 3 навколо осі y_1 (рис. 1);

– рівняння 6 (відносно ϕ_2^y) – крутильні коливання колеса 4 навколо осі y_2 (рис. 1);

– рівняння 7 (відносно ϕ_1^z) – крутильні коливання колеса 3 навколо осі z_1 (рис. 1);

– рівняння 8 (відносно ϕ_2^z) – крутильні коливання колеса 4 навколо осі z_2 (рис. 1);

– рівняння 9 (відносно x_1) – поздовжні коливання колеса 3 вздовж осі x_1 (рис. 1);

– рівняння 10 (відносно x_2) – поздовжні коливання колеса 4 вздовж осі x_2 (рис. 1);

– рівняння 11 (відносно y_1) – поперечні коливання колеса 3 вздовж осі y_1 (рис. 1);

– рівняння 12 (відносно y_2) – поперечні коливання колеса 4 вздовж осі y_2 (рис. 1);

– рівняння 13 (відносно z_1) – поперечні коливання колеса 3 вздовж осі z_1 (рис. 1);

– рівняння 14 (відносно z_2) – поперечні коливання колеса 4 вздовж осі z_2 (рис. 1);

Таким чином, перші 8 рівнянь системи описують крутильні коливання елементів механічної системи, решта 6 – поздовжньо-поперечні коливання зубчастих коліс.

Висновки

На основі попередньо розробленої моделі динаміки, з використанням рівняння Лагранжа другого роду, створена просторова математична модель (6) власних частот та форм коливань механічної системи класу циліндричних, одноступінчастих, евольвентних, косозубих зубчастих передач. Запропонована математична модель являє собою систему 14 диференціальних рівнянь другого порядку, відносно узагальнених координат динамічної моделі. В залежності від застосованого алгоритму розв'язок даної системи диференціальних рівнянь може бути отриманий у вигляді амплітудно-частотного спектра частот та форм власних коливань динамічної системи (частотна область) та у вигляді зміни у часі кожної з узагальнених координат (часова область).

Для першого випадку задача пошуку розв'язку системи зводиться до обчислення власних чисел характеристичної матриці системи рівнянь (спектра матриці). З цією метою можуть бути застосовані відомі чисельні методи, наприклад, метод А.М. Данилевського, Леверрьє – Фаддєєва, невизначених коефіцієнтів тощо.

У другому випадку для отримання розв'язку необхідно скористатись методами покрокового інтегрування типу Рунге, Кутта – Мерсона, Ейлера, тобто звести рішення рівнянь системи (6) до рішення задачі Коші. Це передбачає заміну системи з 14 диференціальних рівнянь 2-го порядку системою з 28 рівнянь 1-го порядку і визначення початкових умов, зазвичай з умови статичної рівноваги описуваної механічної системи.

Література

1. Калашников В.В. Организация моделирования сложных систем / Калашников В.В. – М. : Знание, 1982. – 200 с.
2. Степанов В.И. Использование преобразованных топологических моделей упругих систем металлорежущих станков в задачах динамики / В.И. Степанов, М.К. Клебанов // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1984. – № 10. – С. 139-143.
3. Системы автоматизированного проектирования : в 9 книгах. Кн. 4. Математические модели технических объектов : учебное пособие для ВУЗов. / В.А. Трудоношин, Н.В. Пивоварова ; под ред. И.П. Норенкова. – М. : Высшая школа, 1986. – 160 с.
4. Кильчевский Н.А. Курс теормеханики / Кильчевский Н.А. – М. : Наука, 1977. – Т. 2. – 544 с.
5. Абрамов Б.М. Колебания прямозубых зубчатых колес / Абрамов Б.М. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1969.
6. Балицкий Ф.Я. Об акустической диагностике перекоса осей в прямозубом зубчастом зацеплении / Ф.Я. Балицкий, М.Д. Генкин, А.Г. Соколова // Вибрация механизмов с зубчастыми передачами. – М. : Наука, 1978. – С. 11-14.

П.В. Дяченко

Пространственная математическая модель собственных частот и форм колебаний механической системы класса одноступенчатых, эвольвентных зубчатых передач

В статье предлагается пространственная математическая модель динамики механической системы класса одноступенчатых, цилиндрических, косозубых, эвольвентных зубчатых передач. Предлагаемая модель представляет собой систему четырнадцати дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат, составленную на основании уравнений Лагранжа второго рода, которые описывают пространственные колебания зубчатых колес механической системы.

P.V. Dyachenko

Spatial Mathematical Model of the Proper Frequencies and Forms of the Fluctuations of the Mechanical System, Concerning to the Class of Single-Stage, Evolvent Toothed Issues

In the article it is offered a spatial mathematical model of mechanical system dynamic, concerning to the class of single-stage, cylindrical, lopsided, evolvent toothed issues. The proposed model is a system of fourteen differential equations of the second order of comparatively generalised coordinates, formed on basis of Lagrange's equations of the second order, which describe the spatial fluctuations of toothed wheel about of the mechanical system.

Стаття надійшла до редакції 01.11.2010.